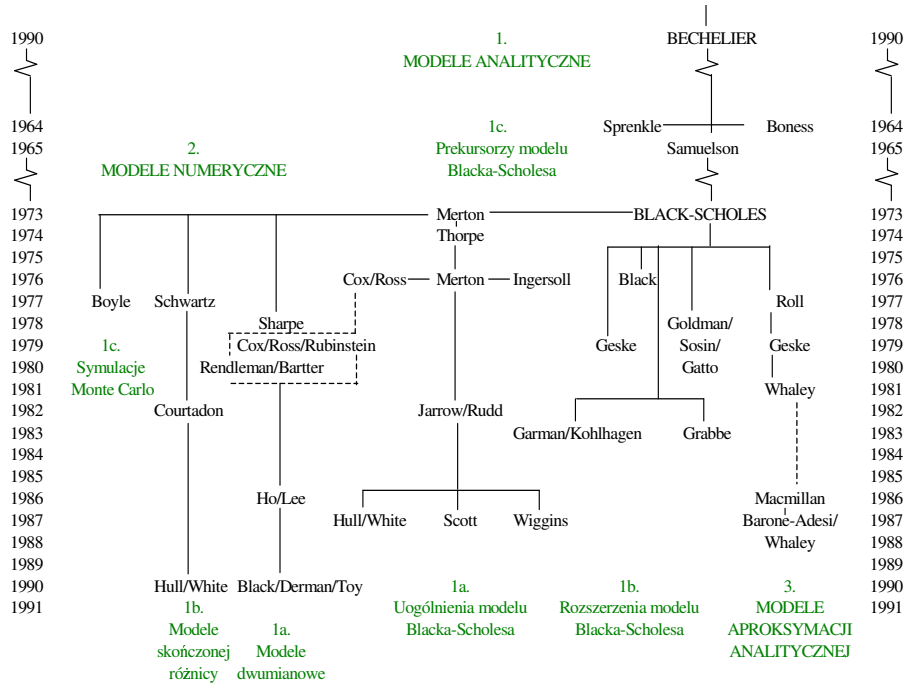
ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO
NR 394 PRACE KATEDRY EKONOMETRII I STATYSTYKI NR 15 2004

AGNIESZKA MAJEWSKA
Uniwersytet Szczeciński

ZASTOSOWANIE METODY MONTE CARLO DO WYCENY OPCJI

WSTĘP

Opcje są instrumentami, które same w sobie nie mają żadnej wartości. To, ile kosztuje dana opcja, zależy bowiem od waloru, na który została ona wystawiona i który podlega zmianom cen. Początkowo w wycenie opcji posługiwano się wyłącznie intuicją. Jako pierwszy matematykę próbował zastosować w 1900 roku Louis Bachelier. Jego rozważania nad wartością opcji kontynuowali w latach sześćdziesiątych Case Sprenkle, James Boness oraz Paul Samuelson. Ostateczną odpowiedź uzyskali w 1970 roku Fischer Black, Myron Scholes i Robert Merton, dokonując przełomu w dziedzinie wyceny instrumentów pochodnych. Ewolucję modeli wyceny opcji przedstawiono na rysunku 1.



Rys.1. Drzewo genealogiczne modeli wyceny opcji
Źródło: [9], s. 402.

1. HISTORIA METOD MONTE CARLO

Historia metod Monte Carlo, których nazwa pochodzi od słynnego koła ruletki w Monako sięga 1944 roku. Do ich powstania przyczyniły się prowadzone wówczas przez J. Prespera Eckerta i Johna W. Mauchly'ego prace nad unowocześnieniem techniki budowania „maszyn liczących". Zajmowali się oni konstrukcją maszyny o nazwie ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*), której przeznaczeniem było obliczanie tablic artyleryjskich na potrzeby armii amerykańskiej. Za prekursorów tych metod uważa się jednak J. von Neumanna i S.M. Ulama. J. von Neumann rozwijał metody Monte Carlo biorąc udział w projekcie maszyny MANIAC I (*Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer*) i jej następnej wersji – MANIAC II. Już w pierwszym stadium badań okazało się bowiem, że efektywność tych metod jest zadowalająca tylko wówczas, gdy dysponuje się szybką maszyną cyfrową, wykonującą miliony operacji na sekundę. Możliwe jest wtedy wykonanie du-

żych prób statystycznych, gwarantujących zmniejszenie błędu średniokwadratowego otrzymanego rozwiązania do oczekiwanego poziomu. Głównym bodźcem do tych prac było badania zachowania się neutronów w reaktorze atomowym. Z kolei Stanisław Ulam, polski matematyk pracując na tych maszynach, szeroko rozpowszechniał i rozwijał metody Monte Carlo.

Trudności techniczne związane z wykorzystaniem metod Monte Carlo tak naprawdę przyczyniły się do ich ulepszenia. Pozwoliło to na zwiększenie efektywności na tyle, że krąg możliwych zastosowań objął wiele zadań nauki i techniki. Najbardziej znaczące udoskonalenia są związane z wprowadzeniem do obliczeń prawdopodobieństw warunkowych i wag statystycznych uzyskanych na podstawie informacji dotyczących rozwiązań równań sprzężonych w sensie określonym przez podstawowe funkcjonały zadania. Uważa się, że rozkwit metod Monte Carlo przypada na lata 70., gdy zaczęły być wykorzystywane między innymi do:

- obliczania całek,
- rozwiązywania równań liniowych, różniczkowych cząstkowych, całkowych,
- szacowania stałych matematycznych,
- generowania liczb losowych,
- zagadnień własnych,
- zagadnień modelowania cyfrowego.

2. *ZASTOSOWANIE METOD MONTE CARLO W FINANSACH*

Początek zastosowań metod Monte Carlo w dziedzinie finansów wiąże się z opublikowaniem w 1977 roku pracy Phelima Boyle'a[1], który zaproponował wykorzystanie metody Monte Carlo do symulacji. Polegają one na generowaniu dowolnej liczby ciągów obserwacji zachowujących określone założenia, takie jak losowość, typ rozkładu, parametry rozkładu i korelacje między wygenerowanymi ciągami obserwacji. Stosowane są głównie do zarządzania portfelem różnych instrumentów finansowych, do których można zaliczyć akcje spółek giełdowych, waluty, papiery wartościowe o stałym dochodzie, instrumenty

[1] Zob. [2], s. 323–338.

pochodne. Ostatnio metody te znalazły również zastosowanie w zarządzaniu portfelem kredytowym banków komercyjnych.

Zgodnie z rysunkiem 1, symulacje Monte Carlo należą do grupy metod numerycznych wyceny opcji. Rozważane są one w sytuacji rynku doskonałego, czyli wówczas, gdy na rynku finansowym:

- oprocentowanie depozytów i kredytów bankowych jest jednakowe,
- wysokość zaciągniętych kredytów jest nieograniczona,
- nie ma kosztów zawierania transakcji,
- wszystkie aktywa są doskonale podzielne,
- dopuszczalna jest krótka sprzedaż aktywów.

W metodzie tej wykorzystywany jest fakt, że rozkład wartości waloru w dniu wygaśnięcia opcji jest określony procesem decydującym o jego zmianach. Znając ten proces, przez wielokrotne symulacje uzyskuje się rozkład końcowych wartości waloru bazowego, z którego można bezpośrednio wyprowadzić wartość oczekiwaną waloru w dniu wygaśnięcia opcji. Z uwagi na deterministyczny charakter tej metody otrzymane liczby losowe nie są w rzeczywistości liczbami przypadkowymi, lecz można je dokładnie przewidzieć, stąd częste określenie ich jako liczb pseudolosowych.

3. WYKORZYSTANIE SYMULACJI MONTE CARLO DO WYCENY OPCJI

Zastosowanie symulacji Monte Carlo do wyceny opcji w praktyce sprowadza się do wyznaczenia przyszłych cen waloru bazowego przy wykorzystaniu geometrycznego ruchu Browna, a następnie zastosowania ogólnych wzorów na wycenę opcji. Ruch Browna po raz pierwszy został zastosowany do modelowania stochastycznych procesów finansowych przez Norberta Wienera w latach 1918–1923. Stał się przez to jednym z najważniejszych modeli procesów losowych. Ponieważ może być traktowany jako granica procesu błądzenia losowego, często jest wykorzystywany w badaniach ekonomicznych do opisu niepewności w czasie ciągłym[2]. Przykład stochastycznego równania różniczkowego, które może być stosowane między innymi do modelowania cen akcji, stopy inflacji, podaży pieniądza, podał między innymi A.G. Malliaris (1990). W finansowych modelach wyceny opcji do procesu Wienera stosuje się tak

[2] Zob. [4]; [7]; [10], s. 23–25; [11].

zwany lemat Ito[3]. Zakładając ciągłość procesu, otrzymuje się następujący wzór symulujący przyszłą wartość waloru bazowego[4]:

$$\ln S = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot \varepsilon \sqrt{t} \,, \tag{1}$$

gdzie:

S – przyszła cena instrumentu finansowego,

S_0 – cena rzeczywista instrumentu bazowego,

μ – średnia arytmetyczna procesu, wyznaczona na podstawie danych rzeczywistych,

σ – odchylenie standardowe procesu, wyznaczona na podstawie danych rzeczywistych,

t – przyrost czasu,

ε – proces stochastyczny, w którym kolejne zmienne są stochastyczne o rozkładzie normalnym.

Po wyznaczeniu możliwych cen waloru bazowego wyceny opcji dokonano wykorzystując model Blacka-Scholesa (1973). Cenę opcji kupna (c) i sprzedaży (p) w modelu tym wyznacza się według następujących równań:

$$c = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-rt} N(d_2) \,, \tag{2}$$

$$p = X \cdot e^{-rt} N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \,, \tag{3}$$

przy czym:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2) \cdot t}{\sigma \sqrt{(t}} \,,$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t} \,,$$

gdzie:

S – wartość waloru bazowego w chwili t,

X – cena wykonania opcji,

r – krajowa stopa procentowa wolna od ryzyka,

T – okres ważności opcji,

[3] Zob. *ibidiem*.

[4] Zob. [7], s. 99.

σ – zmienność ceny waloru bazowego,
$N(d_i)$ – dystrybuanta standaryzowanej zmiennej o rozkładzie normalnym.

4. BADANIE EMPIRYCZNE

Badanie empiryczne objęło warranty notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Należą one do instrumentów bardzo zbliżonych w swej istocie do opcji. Jak pisze J. Hull, są to „opcje powstające w nieco inny sposób”[5], ponieważ wystawcami mogą być spółki lub instytucje finansowe. Warrant, podobnie jak opcja, daje więc jego posiadaczowi prawo, ale nie obowiązek, kupna lub sprzedaży leżącego u jego podstaw papieru wartościowego po uprzednio ustalonej cenie i w określonym czasie. Inaczej mówiąc, jest to talon opcyjny w formie obiegowego papieru wartościowego notowanego na giełdzie. Ze względu na fakt, że wartość warrantów wyznaczana metodą Monte Carlo opiera się na symulacjach cen walorów bazowych, które niekiedy mogą znacznie odbiegać od ich realizacji, ograniczono się do prezentacji wyników dla siedmiu walorów, wśród których się znalazło:

- 5 warrantów kupna na akcje Agory, Budimexu, Bigu, Elektrimu oraz kontraktu futures na WIG20,
- 2 warranty sprzedaży na akcje TP SA oraz indeks WIG20.

W rzeczywistości badanie przeprowadzone było dla 34 warrantów. Otrzymane wyniki przedstawia tabela 1, w której dla różnych pomiarów zmienności cen walorów bazowych ujęto względne błędy wycen. W badaniu zastosowano trzy metody szacowania zmienności:

a) klasyczna – za pomocą odchylenia standardowego (n = 180);
b) wykorzystanie procedury EWMA[6], w której parametr wagowy λ został przyjęty na czterech poziomach: 0,5; 0,7; 0,9 i 0,95;
c) wykorzystanie modeli ekonometrycznych:
   - GARCH(1,1) – Agora, Big, Elektrim, Futures na WIG20, TP SA, WIG20,
   - ARCH(1) – Budimex.

W tabeli prezentującej otrzymane wyniki nie ujęto również większej liczby okresów, ponieważ w niektórych przypadkach już od trzeciego uzyskiwane

[5] Zob. [5], s. 215.
[6] Zob. [6], s. 453–462.

ceny teoretyczne osiągały wartości różniące się od giełdowych o kilka tysięcy procent. Najmniejszy względny błąd oszacowań dla wycen poszczególnych warrantów symulacjami Monte Carlo wahał się w granicach od 1,45 do 74,2%. W większości przypadków nie osiągnął on nawet 10%. Należy jednak zaznaczyć, że tak niskie błędy utrzymywały się z reguły tylko do drugiego okresu. Ponadto bardzo często się zdarzało, że oprócz bardzo dokładnych wycen pojawiały się wyniki diametralnie różniące się od wartości rzeczywistych.

Tabela 1

Względne błędy wycen symulacji Monte Carlo

AGOI054BDM						
Numer okresu	*s(x)*	$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}7$	$\lambda = 0{,}9$	$\lambda = 0{,}95$	model
I	119,11	**4,53**	21,92	101,10	169,71	6,96
II	106,09	**15,13**	30,36	93,02	141,04	17,30
BDXI032BDM						
I	50,60	103,30	91,30	53,50	52,40	**25,70**
II	86,00	96,30	95,30	87,00	86,60	**74,20**
BIGI004BDM						
I	**20,08**	5 269,24	1 135,18	238,80	172,65	23,27
II	**14,66**	6 958,29	1 389,98	282,84	205,10	18,17
ELEI004BDM						
I	33,29	6,00	5,44	**2,94**	13,94	4,61
II	**1,45**	82,94	81,63	75,84	38,69	58,82
FW2L111BDM						
I	**3,40**	147,04	64,68	13,71	19,31	18,90
TPSX011BRE						
I	10,20	97,95	47,01	18,51	**8,56**	9,85
II	19,26	37,93	**5,26**	13,66	20,38	19,51
W20X150BRE						
I	46,12	251,27	20,29	22,28	**5,86**	60,38
II	69,82	3 181,66	481,67	195,44	296,82	**7,86**

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowaniem przeprowadzonych symulacji są następujące wnioski:

1. Metoda Monte Carlo eliminuje istnienie ogólnie rozumianych trendów giełdowych, jakim podlegają ceny walorów bazowych. W przypadku wystąpienia wyraźnego trendu na giełdzie ceny akcji zachowują się inaczej niż w przypadku geometrycznego ruchu Browna. Może to być powodem niewłaściwych wycen.

2. Teoria chaosu zakłada, że rynek „obdarzony jest pamięcią", która ma znaczny wpływ na przyszłe ceny walorów bazowych. Wprowadzenie losowości do wycen poprzez symulacje prowadzi do wykluczenia tego założenia[7].

3. Najlepsze wyniki symulacji uzyskuje się na jeden, dwa okresy „do przodu".

4. Zmiana wartości walorów bazowych nie ma tak wielkiego wpływu na wycenę warrantów i opcji, jak zmiana wariancji stop zwrotu z tego waloru.

5. Symulacje mogłyby obejmować również kształtowanie się stopy procentowej wolnej od ryzyka, ale w obecnej sytuacji gospodarczej założenie, że stopy procentowe będą zmieniać się w dowolnym kierunku, ma charakter czysto teoretyczny.

PODSUMOWANIE

Wśród metod numerycznych do wyceny instrumentów pochodnych mogą być stosowane symulacje Monte Carlo. Otrzymane wyniki wskazują, że mogą być one prowadzone tylko na jeden, dwa okresy „do przodu". W większości przypadków już od trzeciego uzyskiwano ceny teoretyczne nawet o kilka tysięcy procent różniące się od giełdowych. Ograniczeniem metody Monte Carlo jest również nieuwzględnianie ogólnie rozumianych trendów giełdowych, jakim podlegają ceny walorów bazowych. W przypadku wystąpienia wyraźnego trendu na giełdzie ceny akcji zachowują się inaczej niż w przypadku geometrycznego ruchu Browna. Może to być powodem niewłaściwych wycen. Przeprowadzone symulacje potwierdziły, że jednym z najważniejszych parametrów przy wycenie jest zmienność. Zmiana wartości walorów bazowych nie miała bowiem tak wielkiego wpływu na wycenę warrantów, jak zmiana wariancji stóp zwrotu z tego waloru.

LITERATURA

1. Black F., Scholes M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. „Journal of Political Economy" 1973, No. 81.

[7] Zob. [8], s. 83–104; [13].

2. Boyle P.P.: *Options: A Monte Carlo Approach*. „Journal of Financial Economics" 1977, No. 4.
3. Brandt S.: *Analiza danych. Metody statystyczne i obliczeniowe*. PWN, Warszawa 1999.
4. Gajek L., Kałuszka M.: *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*. WNT, Warszawa 2000.
5. Hull J.: *Kontrakty terminowe i opcje*. WIG-Press, Warszawa 1997.
6. *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*. Red. K. Jajuga. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2000.
7. Majewska A., Majewski S.: *Porównanie zmienności kursów euro szacowanych na podstawie danych historycznych oraz z użyciem procedury EWMA*. W: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*. Cz. I, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002.
8. Peters E.E.: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*. WIG-Press, Warszawa 1997.
9. Smithson Ch.W., Smith C.W., Wilford D.S.: *Zarządzanie ryzykiem finansowym*. Dom Wydawniczy ABC, Kraków 2000.
10. Syczewska E.: *Analiza relacji długookresowych: estymacja i weryfikacja*. Monografie i Opracowania nr 462. SGH, Warszawa 2002.
11. Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa 1998.
12. Weron A., Wojakowski Ł.J.: *Metody numeryczne w modelowaniu finansowym – metoda Monte Carlo*. „Rynek Terminowy" 1999, nr 4.
13. Zwolankowska M.: *Fraktalna geometria polskiego rynku akcji*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2001.

THE INTRODUCTION TO USING MONTE CARLO METHOD IN THE VALUATION OF OPTIONS

Summary

The Monte Carlo Method is one of numerical methods, which is used to value derivatives. It provides approximate solutions to a variety of mathematical problems by performing statistical sampling experiments on a computer. The article shows how Monte Carlo simulations can be used in the valuation of options. It is a new technique

based on the randomisation of derivatives' prices. To put Monte Carlo simulations in the valuation of options in practice resolves into calculation of the future prices of underlying assets by using geometric Brown's motion, and subsequently using general options pricing models. The empirical data for the analysis were warrants quoted on the Warsaw Stock Exchange, because they belong to instruments that are very similar in their nature to options. The results show that Monte Carlo simulations in the valuation of options can be used for only one or two periods ahead.

Translated by Agnieszka Majewska